

【 数学－ 1 】

以下の問に答えよ.

問 1 関数 $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-5x+2}$ を部分分数分解せよ.

問 2 関数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ を, $x=1$ を中心にテイラー展開せよ.

問 3 複素関数 $f(z) = \frac{z+1}{2z^2-5z+2}$ を, $\frac{1}{2} < |z-1| < 1$ の円環領域に対して

$z=1$ を中心にローラン展開せよ.

【 数学－ 2 】

以下の問に答えよ.

問 1 次の関数のラプラス変換を求めよ.

ただし, ラプラス変換は $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義される.

t は実数, s は複素数である.

(a) $f(t) = e^{-at}$ ただし, a は定数

(b) $f(t) = t$

(c) $f(t) = \sin t$

問 2 微分方程式 $\frac{df(t)}{dt} + 3f(t) = e^{-t}$ をラプラス変換を用いて解け. ただし, 初期条件は

$f(0) = 1$ とする. また, ラプラス変換の性質として $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ がある.

【 物理－ 1 】

図1に示すような、直交している一様な電場 \mathbf{E} (y 方向) と一様な磁場 \mathbf{B} (z 方向) の中に、質量が m で正の電荷 q をもつ点電荷がある. このとき以下の問に答えよ. ただし, 時刻 $t \leq 0$ において, 点電荷の速度はゼロで原点 O に存在しているとする. なお, 点電荷の磁化や, 摩擦, 空気抵抗, 重力の影響は無視できるとする.

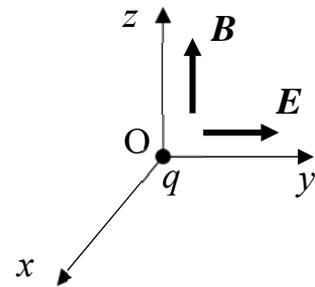


図1

- 問1 時刻 $t = 0$ において電場および磁場が同時に加わり, 電荷が運動を始める場合, 点電荷の運動方程式を x 方向, y 方向および z 方向について, それぞれ求めよ.
- 問2 問1で得られた運動方程式から, 時刻 $t \geq 0$ における点電荷の x 方向, y 方向および z 方向の速度および位置を求めよ. また, 点電荷の位置の軌跡を図示せよ.
- 問3 時刻 $t = 0$ において電場および磁場が同時に加わり, 電荷が運動を始め, その後時刻 $t = \frac{2\pi m}{qB} n$ (n は正の整数) ごとに, 電場および磁場の向きがともに反転を繰り返す場合, 図を使って点電荷の運動を説明せよ. ここで, B は磁場 \mathbf{B} の大きさとする.

【 物理－ 2 】

質量 m のおもりが弾性定数 k のばねに結ばれており、時刻 t におけるおもりの変位を $x(t)$ と表すとき、おもりが速度に比例する抵抗力 $\gamma dx(t)/dt$ による減衰を受けつつ運動する場合を考える。この系に周期的な外力 $mf(t)$ を作用させるとき、系の運動方程式は以下のように書ける。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

ここで $2\lambda \equiv \gamma/m$, $\omega_0^2 \equiv k/m$ とおいた。ただし $2\lambda^2 < \omega_0^2$ とする。この系に外力を加え始めてから十分時間が経過した後、系は $x(t) = a \sin(\omega t)$ で表される振幅 a , 角振動数 ω の定常的な単振動を示した。以下の問に答えよ。

- 問 1 系に定常的な単振動 $x(t) = a \sin(\omega t)$ が起こるために必要な $f(t)$ の条件を求めよ。ここで三角関数の合成公式 $A \sin \theta + B \cos \theta = (A^2 + B^2)^{1/2} \sin(\theta + \alpha)$, $\tan \alpha = B/A$ を使用してよい。また、外力の角振動数と系の角振動数の関係について述べよ。
- 問 2 系の単振動 $x(t) = a \sin(\omega t)$ に対して外力の振動の位相がどれだけ進んでいるか、角振動数 ω の関数として求めよ。
- 問 3 問 1 で得られた結果を用いて、外力 $mf(t)$ の振幅について考えることで、系に定常的な単振動が起こるために必要な外力が最小となる角振動数を求めよ。

【 化学－ 1 】

理想気体の状態方程式とは異なり、van der Waals の状態方程式と同様に、臨界点や Joule-Thomson 効果などを定性的に説明可能な状態方程式として、Dieterici の状態方程式がある。特に、Dieterici の状態方程式は、van der Waals の状態方程式に比べて、臨界点における圧縮因子の値が、非極性分子気体の実測値に近いことが知られている。

ここで、Dieterici の状態方程式は以下の式で与えられる。

$$\left(Pe^{\frac{an}{VRT}} \right) (V - bn) = nRT$$

Dieterici の状態方程式に関する以下の問に答えよ。ただし、 P は圧力、 V は体積、 n はモル数、 T は絶対温度、 R は気体定数、 e は自然対数の底、 a および b は定数とする。

- 問 1 定数 a と b の物理化学的意味について説明せよ。
- 問 2 臨界点について説明するとともに、臨界点において満たすべき圧力 P 、体積 V 、絶対温度 T の関係式を示せ。
- 問 3 臨界体積、臨界温度、臨界圧力を求めよ。
- 問 4 圧縮因子について説明せよ。また、van der Waals の状態方程式により得られる臨界点における圧縮因子の値 0.375 に比較して、Dieterici の状態方程式により得られる臨界点における圧縮因子の値は、アルゴンの実測値 0.292 や二酸化炭素の実測値 0.274 に近いことが知られている。Dieterici の状態方程式により得られる臨界点の圧縮因子の値を有効数字 2 桁で求めよ。ここで、 e の値としては 2.72 を用いよ。
- 問 5 理想気体の状態方程式では、Joule-Thomson 効果を説明できない理由を示せ。ここで、Joule-Thomson 係数は以下の式により求めることができる。

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$$

ただし、 μ は Joule-Thomson 係数、 H はエンタルピーとする。また、定圧熱容量 C_P は以下の式で表される。

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

【 化学－ 2 】

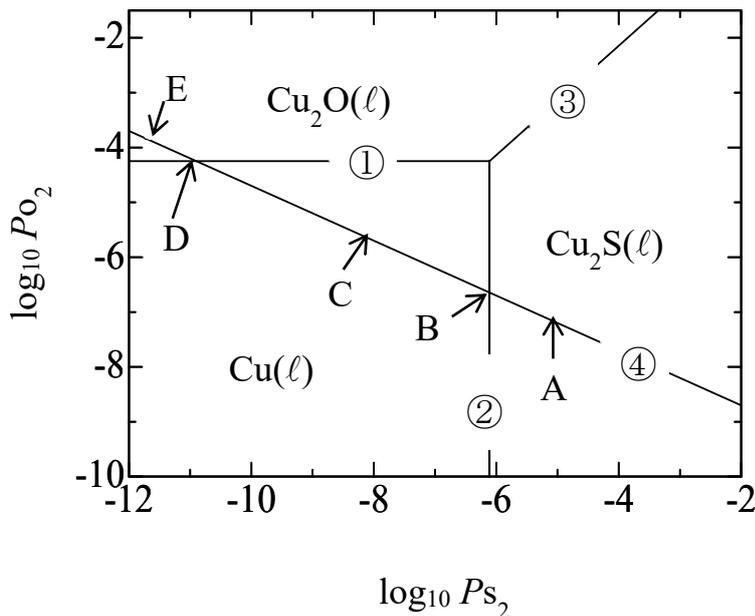
理想気体近似が可能な気体について、定積モル熱容量 C_V および定圧モル熱容量 C_P の関係を考える。以下の問に答えよ。

- 問 1 気体分子の運動の自由度を f とする。単原子分子の f を求めよ。
- 問 2 1 モルの単原子分子について、 C_V と f の関係を考える。
- (a) 内部エネルギー U を気体定数 R 、絶対温度 T および f で表せ。
 - (b) 体積一定で温度を T から $T + \Delta T$ に変化させたときの内部エネルギー変化 ΔU を f 、 R および温度変化 ΔT を用いて表せ。
 - (c) C_V を f および R を用いて表せ。
- 問 3 1 モルの単原子分子について、 C_P と C_V の比 $\gamma (= C_P / C_V)$ と f の関係を考える。
- (a) C_V と C_P の差 $C_V - C_P$ を f 、 R 、 γ を用いて表せ。
 - (b) C_P を f および R を用いて表せ。
 - (c) γ を f を用いて表せ。
- 問 4 H_2 や N_2 のような 2 原子分子について考える。単原子分子の場合、 C_P の値は室温から 2000 K まで一定値 $20.8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ をとるとする。
- (a) 2 原子分子について、室温における C_P の値を有効数字 2 桁で求めよ。
 - (b) 2 原子分子について、温度が室温から上昇するにつれ C_P はどのように変化するかを説明せよ。

【 材料化学－ 2 】

問 1 図は、1473 K における Cu-S-O 系における安定相の平衡酸素分圧と平衡硫黄分圧の関係を対数グラフで表したものであり、ポテンシャル図と呼ばれる。このポテンシャル図について下記の問題に答えよ。ただし、気体定数を R とする。

- (a) 図中の①の線を表す反応式を書き、その反応の標準自由エネルギー変化を ΔG° 、絶対温度を T として、 $\ln P_{O_2}$ を表す式を示せ。
- (b) 図中の②の線を表す反応式を書き、その反応の標準自由エネルギー変化を ΔG° 、絶対温度を T として、 $\ln P_{S_2}$ を表す式を示せ。
- (c) 図中の③の線を表す反応式を書き、その反応の標準自由エネルギー変化を ΔG° 、絶対温度を T として、 $\ln P_{O_2}$ と $\ln P_{S_2}$ の関係を表す式を示せ。
- (d) S_2 、 O_2 、 SO_2 の平衡反応を表す反応式を示せ。さらに、その反応の標準自由エネルギー変化を ΔG° 、絶対温度を T として、 $\ln P_{O_2}$ を $\ln P_{SO_2}$ と $\ln P_{S_2}$ を用いて式で示せ。
- (e) 図中の④の線は SO_2 の分圧を 0.2 としたときの等 P_{SO_2} 線である。 SO_2 分圧を 0.2 に保った状態で Cu_2S を A の状態から P_{O_2} を上げる場合にどのようなルートで Cu_2O に至るのかを図中の A～E の記号を用いて各点における平衡関係と合わせて説明せよ。



問2 アルミニウムの製錬は酸化アルミニウムを電解原料として、氷晶石 (Na_3AlF_6) に酸化アルミニウムを溶解する熔融塩電解により行われている。陽極にはカーボンを用いており、 CO_2 が発生する。熔融塩電解は 1000°C で行われる。

(1) 式 of アルミニウムの分解反応と (2) 式 of 陽極における CO_2 の発生の反応から全反応式を示し、 1000°C の酸化アルミニウムの分解電圧を求めよ。ファラデー定数は 96485 C/mol を用いよ。有効数字は 3 桁で計算せよ。



ここで、 T は絶対温度とする。

問3 CaCO_3 を大気中において約 1000°C で熱分解するときの反応式を示せ。さらに、相律について説明し、この反応の自由度を求めよ。

【 材料物性－ 1 】

金属中の原子の拡散について問う。

問 1 原子空孔の密度の温度依存性について以下の設問に答えよ。

- (a) 原子空孔 1 個の形成に必要な形成エンタルピーを $H_f (>0)$ とする。 N 個の格子点からなる結晶中に n 個の原子空孔が導入された場合のエントロピー変化 ΔS および温度 T における自由エネルギー変化 ΔG を n の関数としてそれぞれ表せ。ただし、ボルツマン定数を k とし、エントロピー項としては配置エントロピーのみを考えるものとする。
- (b) 熱平衡状態での原子空孔濃度 C_v を導出し、空孔濃度の温度依存性について述べよ。ただし、系のサイズは十分大きく、 $n \ll N$ とする。なお導出にはスターリングの公式 ($\ln N! \cong N(\ln N - 1)$) を用いること。

問 2 鉄中に微量に含まれる炭素の拡散が、同じく微量に含まれるニッケルの拡散に比べて速い理由について、拡散のメカニズムの観点から説明せよ。

問 3 鉄の結晶構造は 911°C を境に変化する。この構造変化について説明し、それが鉄中の原子の拡散におよぼす影響について簡潔に述べよ。

【材料物性－２】

物質の磁性について，以下の問に答えよ．

問１ 磁場 H におかれた物質の磁化 M は帯磁率 χ を用いて次のように書ける．

$$M = \chi H \quad (1)$$

この磁場 H に対する物質の応答が磁性であり，基本的なものとして反磁性，常磁性，強磁性などがある．例えば希ガスや Bi, Cu などの金属は反磁性，酸素分子やアルカリ金属そして V, Cr, Mo などの遷移金属は常磁性，室温における Fe, Ni, Co などの金属は強磁性を示す．

- (a) 反磁性，常磁性，強磁性を示す物質に対して，消磁された状態から磁場 H を次のように変化させたときの磁化 M の変化（磁化曲線（ M - H 曲線）を H を横軸にして示せ．

$$H: 0 \rightarrow H_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow -H_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow H_{\max} \quad (2)$$

- (b) 反磁性，常磁性，強磁性の起源を，電子の軌道や磁気モーメントの配列の観点などから簡潔に説明せよ．図を用いてもよい．

問２ 磁場 H に存在する互いに相互作用のない磁気モーメント m の向きが，磁場の方向と平行か反平行しか向けない状況を考える．この場合，それぞれを平行（ P ）および反平行（ A ）状態と呼ぶと，それぞれの状態のエネルギーは次のように書ける．

$$\begin{cases} E_P = -mH \\ E_A = +mH \end{cases} \quad (3)$$

- (a) 温度 T において，それぞれの状態をとる確率 P_P および P_A を示せ．ボルツマン定数を k とする．
- (b) 温度 T および磁場 H において平衡状態で観測される磁気モーメント $\langle m \rangle$ を示せ．
- (c) 単位体積中に磁気モーメントが N 個存在する物質の磁化は

$$M = N \langle m \rangle \quad (4)$$

と書くことができる．高温域 ($kT \gg |mH|$) において，(b) の結果をテイラー展開することにより，帯磁率 χ が温度 T に反比例することを導出せよ．

【 材料加工－ 1 】

粉末成形とは、金属粉を型に充填して固化成形し、高温に保持して焼結し、機械部品などを製造するプロセスである。金属材料の粉末成形に関する以下の問に答えよ。

- 問 1 粉末成形に使用する金属粉末の代表的な製造プロセスとして、ガスアトマイズ法、水アトマイズ法、遠心アトマイズ法がある。これら三つのプロセスの原理と特徴について説明せよ。その場合、各プロセスで得られる金属粉末の形状やサイズなどの特徴がわかるように説明せよ。
- 問 2 粉末成形は、自動車部品などの構造用部品製造技術として応用されているだけでなく、既存の溶解鋳造法では製造が困難な合金の製造にも適している。そのため、さまざまな機能材料（例えば磁性材料）、高硬度材料（例えば超硬合金）などの製造に適用されている。その理由について、製造プロセスの特徴、成形品の力学的特性における長所と短所、量産性（製造コスト）などを考慮し、溶解鋳造法との違いが明確にわかるように説明せよ。

【 材料加工－２ 】

大型の合金鋳塊の凝固組織について、以下の問に答えよ。

- 問 1 鋳塊表面近傍の組織は、チル晶と呼ばれる組織となる場合が多い。どのような組織となるかを発生理由も含め説明せよ。
- 問 2 チル晶より鋳塊内部には、柱状晶と呼ばれる組織が形成されることが多い。どのような組織となるかを発生理由も含め説明せよ。
- 問 3 大型の合金鋳塊には、ミクロ偏析およびマクロ偏析が発生する場合が多い。これらの偏析について発生理由も含め説明せよ。ただし、鋳塊が凝固を開始する前の溶湯中の偏析する溶質の組成を X_0 (一定) とし、平衡分配係数 $k = X_S/X_L < 1$ (一定) を仮定せよ。ここで、 X_S 、 X_L は、固液界面における固相および液相の溶質濃度である。